数理解析研究所講究録
第 1682 巻 2010 年 163-167

縮小写像の離散不動点定理とその応用

九州大学・大学院数理学研究院 川崎英文 (Hidefumi Kawasaki)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 はじめに

Brouwer の不動点定理や角谷の不動点定理は Nash 均衡の存在を示す際に極めて強力である．これらの不動点定理が連続変量の世界の定理であることから，離散不動点定理を用いれば離散的な（純戦略）Nash 均衡の存在を保証できると期待できる．

離散不動点定理には次の３タイプがあるが，

1. 縮小写像の不動点定理　Robert(86), Shih-Dong(05), Richard(08)
2. Brouwer の定理を利用するもの　飯村 (03), Yang(04), 飯村-室田-田村 (05)
3. 単調写像の不動点定理　Tarski(55), Topkis(79), 佐藤-川崎 (09).

本発表では縮小写像の離散不動点定理を紹介し，そのゲーム論的意味を述べる．さらに，Brouwer の不動点定理に基づく離散不動点定理にも触れる．

2 ブール代数上の離散不動点定理

本節では Robert[3] による古典的な結果を紹介する．

まず，ブール代数 $\{0,1\}$ の順序と計算規則は以下の通りである．

$$0+0=0,\ 1+0=0+1=1+1=1,$$
$$0\cdot 1=1\cdot 0=0\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1,\ 0\leq 0\leq 1\leq 1,\quad \bar{1}=0,\ \bar{0}=1.$$

$x,y\in\{0,1\}^n$ と $\lambda\in\{0,1\}$ に対して，$x+y$ と λx を成分ごとの和と積で定義する．ブール代数 $\{0,1\}$ 上の行列を**ブール行列**とよぶ．ただし，行列の和や積は通常の計算規則と同じで，それらの成分の和や積はブール代数に従うものとする．また，固有値 ($\in\{0,1\}$) や固有ベクトルも通常と同様に定義する．ブール行列 B の最大固有値を**スペクトル半径**とよび $\rho(B)$ と書く．

補題 1 ブール行列が $A\leq B$ ならば $\rho(A)\leq\rho(B)$.

定理 1 ブール行列 B に関して，以下の条件は互いに同値である．

(1) $\rho(B)=0$.
(2) どの主小行列も零行をもつ．
(3) 置換行列 $\exists P\ s.t.\ P^TBP$ は強下三角行列．
(4) $\exists k\leq n\ s.t.\ B^k=0$.

写像 $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ は，$\rho(B)=0$ なるブール行列が存在して不等式 (1) を満たすとき，**縮小写像**とよばれる．

$$d(f(x),f(y)) \leq Bd(x,y) \quad \forall x,y \in \{0,1\}^n \tag{1}$$

ただし，$d(x,y) := (|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|)$．また，$n$ 変数 n 次元ベクトル値関数 $f=(f_1,\dots,f_n)$ に対して，**関係行列** $B(f) := (b_{ij})$ を次で定義する．

$$b_{ij} := \begin{cases} 0, & f_i \text{ は } x_j \text{ に依存しない．} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

補題 2 写像 $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ が縮小写像であるための必要十分条件は $\rho(B(f))=0$ である．

定理 2 縮小写像 $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ は唯一の不動点 a をもつ．また，$\exists k \leq n$ *s.t.* $f^k(x) \equiv a$.

3 Shih-Dong の離散不動点定理

Robert の不動点定理は，”縮小写像”という大域的な性質から”唯一の不動点の存在”という大域的な性質が導かれることを示したものである．それに対して，Shih-Dong(05) は写像の微分とうい局所的な情報から，”唯一の不動点の存在”という大域的な性質を導いた．本節ではそれを紹介する．

$x \in \{0,1\}^n$ に対して $\bar{x}^i := (x_1,\dots,\bar{x}_i,\dots,x_n)$ として，写像 $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ の**離散微分** $f'(x) := (f_{ij}(x))$ を次式で定義する．

$$f_{ij}(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } f_i(x)=f_i(\bar{x}^j) \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 3 (Shih-Dong の不動点定理) $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ が任意の $x \in \{0,1\}^n$ で $\rho(f'(x))=0$ を満たすならば，唯一の不動点をもつ．

この定理は局所的な条件 $\rho(f'(x))=0$ が「唯一の不動点をもつ」という大域的な結論を導くという意味で深い定理である．事実，Shih-Dong は彼らの不動点定理を Jacobian 予想の組合せ版と主張している．

4 整数区間上の離散不動点定理

Shih-Dong の結果をゲーム理論に適用しようとするとき，ひとつの問題に出会う．ブール代数 $\{0,1\}^n$ では n 人のプレイヤーのそれぞれが 2 つの選択肢を持つ場合にしか対応できな

い．これを克服するためには，$\{0,1\}$ を整数区間に拡張する必要がある．Richard(08) はその問題を解決した．

X_i $(i=1,\dots n)$ を整数の有限区間で $|X_i|\geq 2$ なるものとし，$X:=X_1\times\cdots\times X_n$ とおく．$x+v\in X$ なる $v\in\{\pm 1\}^n$ に対して**離散微分** $f'(x,v):=(f_{ij}(x,v))_{1\leq i,j\leq n}$ を $f_{ij}(x,v)=0$ if $(f_i(x)-x_i-\frac{v_i}{2})(f_i(x+v_je_j)-x_i-\frac{v_i}{2})\geq 0$, $f_{ij}(x,v)=1$ otherwise で定義する．特に，$X=\{0,1\}^n$ の場合は $x+v\in\{0,1\}^n$ なる v は x に対して一意に定まり，$f'(x,v)=f'(x)$ が成り立つ．

定理 4 (Richard-Shih-Dong の不動点定理) 写像 $f:X\to X$ が $x+v\in X$ なる任意の $x\in X$, $v\in\{\pm 1\}^n$ に対して $\rho(f'(x,v))=0$ を満たすならば，f は唯一の不動点をもつ．

定理 4 は Richard [6] が X のサイズに関する帰納法により証明した．$|X_i|=2$ $(\forall i)$ の場合が Shih-Dong の不動点定理であるから，Richard の証明は Shih-Dong の不動点定理を拠り所とする．この理由により，ここでは定理 4 を Richard-Shih-Dong の不動点定理とよぶ

この定理は数学的には興味深いが，$\rho(f'(x,v))$ の計算はかなり面倒である．従って，定理 4 を不動点の計算に利用するのは難しい．ここでは簡単な代替物を与える．

定理 5 （川崎） $f=(f_1,\dots,f_n):X\to X$ が番号を適当につけかえることにより任意の $i=1,\dots n$ について f_i が x_j $(j\geq i)$ に依存しないならば，f は唯一の不動点をもつ．

証明：関係行列と離散微分の間に $f'(x,v)\leq B(f)$ という関係があること．定理の仮定から $\rho(B(f))=0$ が導かれること．スペクトル半径の単調性 $\rho(f'(x,v))\leq\rho(B(f))$ により，Richard-Shih-Dong の不動点定理が適用できる．

この定理を n 人非協力ゲームに適用すると次の結果が得られる．

定理 6 （川崎） 適当にプレイヤーの番号をつけかえて，どのプレイヤー i の最適応答もプレイヤー $i+1,\dots,n$ の選択肢に依存せず一意ならば，唯一の純戦略 *Nash* 均衡が存在する．また，最適応答が複数個ある場合も純戦略 *Nash* 均衡は存在する．

証明：最適応答 f が一点集合の場合は，プレイヤーの番号を適当につけかえることにより，$B(f)$ は強下三角行列になる．よって，定理 1 により $\rho(B(f))=0$ となる．故に，Richard-Shih-Dong の不動点定理により，f は唯一の不動点をもち，それが純戦略 Nash 均衡になる．また，最適応答が複数個ある場合は，そのうちの任意のひとつを選び上述の議論をすれば純戦略 Nash 均衡の存在が言える．ただし，選択の任意性があるため，一意性は言えない．

5 Brouwer の定理に基づく不動点定理

本節では，Brouwer の定理に基づく不動点定理の若干の拡張を与える．

$\mathfrak{S}$ を $X\subset\mathbb{R}^n$ の単体分割とする．どの単体の頂点も整数点であるような単体分割を**整単体分割**とよぶ．$y\in\mathbb{R}^n$ に対して $N(y)=\{x\in\mathbb{Z}^n\mid \|x-y\|_\infty<1\}$ を整近傍といい，y を含む最小

の単体を $S(y)$ で表す．集合 $X \subset \mathbb{Z}^n$ は $\mathrm{co}X \cap \mathbb{Z}^n = X$ となるとき **hole-free** であるという．ただし，$\mathrm{co}X$ は X の凸包を表す．hole-free な集合 X は「$y \in \mathrm{co}X \Rightarrow y \in \mathrm{co}(X \cap N(y))$」を満たすとき**整凸**であるという．

飯村らの離散不動点定理は集合値写像に対するものであるが，簡単のため，ここでは写像に制限したものを紹介する．

定理 7 (飯村, 室田, 田村 [2]) 有限整凸集合 $X \subset \mathbb{Z}^n$ から $\mathrm{co}X$ への写像 f が，$\|x - x'\|_\infty \leq 1$ なる任意の $x, x' \in X$ と任意の i について

$$f_i(x) > x_i \;\Rightarrow\; f_i(x') \geq x'_i \tag{2}$$

を満たすならば，f は不動点をもつ．

条件 (2) は飯村 [1] が最初に与え，Yang[8] がそれより弱い条件 (3) を与えた．

$$(f(x) - x)^T(f(x') - x') \geq 0 \tag{3}$$

定理 7 において整凸性は $S(y)$ が単位立方体に含まれることを示すのに使われる．もし単位立方体にこだわらなければ，整凸性や hole-free の仮定を取り除くことができる．

定理 8 $X \subset \mathbb{Z}^n$ を有限集合とする．$\mathfrak{S}$ を $\mathrm{co}X$ の単体分割で，各単体の頂点は X に属するとする．このとき，$f : X \to \mathrm{co}X$ が任意の $S \in \mathfrak{S}$ と任意の $x, x' \in S$ に対して *(3)* を満たすならば，f は不動点をもつ．($\mathrm{co}X$ がコンパクトで，$f : X \to \mathrm{co}X$ が連続ならば，X は無限集合でもかまわない．)

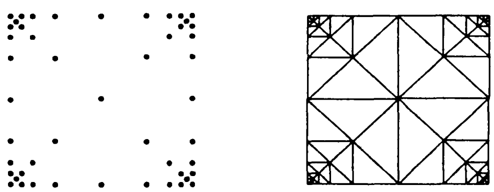

図 1: 無限集合 X と $\mathrm{co}\,X$ の単体分割

証明：単体内部の点は，単体の頂点の凸結合として一意に表すことができる．例えば，$a = \lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z$ と凸結合で表される点 a に対して，$f(a) := \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y) + \lambda_z f(z)$ と定義する（図 2）．このとき，$f : \mathrm{co}X \to \mathrm{co}X$ は連続になる．この事実は，凸結合の表現が一意であることから導かれる．そこで，Brouwer の不動点定理により，f は不動点 $a \in \mathrm{co}X$ をもち，

$$\begin{aligned} 0 &= (f(a) - a)^T(f(a) - a) \\ &= \left\{\sum_x \lambda_x (f(x) - x)\right\}^T \left\{\sum_{x'} \lambda_{x'} (f(x') - x')\right\} \\ &= \sum_{x,x'} \lambda_x \lambda_{x'} (f(x) - x)^T (f(x') - x'). \end{aligned}$$

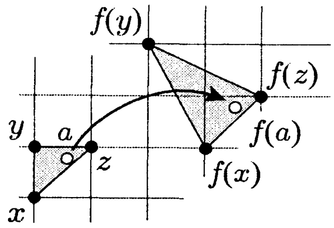

図 2: f の拡張方法

ただし，和は a を含む最小の単体の頂点についてとるものとする．このとき，$\lambda_x \lambda_{x'} > 0$ なる任意の x, x' に対して，$(f(x) - x)^T(f(x') - x') = 0$. さらに，ある頂点 x で $\lambda_x > 0$ なので，$x' = x$ は f の不動点になる．

参考文献

[1] T. IIMURA, A discrete fixed point theorem and its applications, *J. Math. Econom.*, **39** (2003), 725–742.

[2] T. IIMURA, K. MUROTA AND A. TAMURA, Discrete fixed point theorem reconsidered, *J. Math. Econom.*, **41** (2005), 1030–1036.

[3] F. ROBERT, *Discrete Iterations: A Metric Study*, Springer, Berlin, (1986).

[4] J. SATO AND H. KAWASAKI, Discrete fixed point theorems and their application to Nash equilibrium, *Taiwanese J. Math.*, **13** (2009), 431–440.

[5] M.-H. SHIH AND J.-L. DONG, A combinatorial analogue of the Jacobian problem in automata networks, *Advances in Appl. Math.*, **34** (2005), 30–46.

[6] A. RICHARD, An extension of the Shih-Dong's combinatorial fixed point theorem, *Advances in Appl. Math.*, **41** (2008), 620–627.

[7] A. TARSKI, A lattice-theoretical fixpont theorem and its applications, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 285–309.

[8] Z. YANG, Discrete fixed point analysis and its applications, FBA Working Paper No. 210, Yokohama National University, 2004.